

تحلیل دینامیکی تیر مدرج هدفمند با خاصیت پیزوالکتریکی تحت بار مکانیکی و الکتریکی

زینب نورمحمدی

کارشناس ارشد مهندسی مکانیک، دانشگاه رازی.

نام نویسنده مسئول:

زینب نورمحمدی

چکیده

امروزه استفاده از سازه‌های هوشمند مورد توجه بسیاری قرار دارد. از ویژگی‌های سازه‌های هوشمند امکان دریافت لحظه ای اطلاعات درباره وضعیت سازه و قابلیت کنترل آن‌ها از رهگذر این اطلاعات است. حسگرها وسایل دریافت اطلاعات و عملگرها وسایل اعمال کنترل هستند. از بین انواع سازه‌های هوشمند، حسگرها و عملگرهای پیزوالکتریک دارای عملکرد بسیار عالی می‌باشند. در این تحقیق با استفاده از روش اجزاء محدود براساس تئوری الاستیسیته دوبعدی، به بررسی ارتعاشات اجباری تیر هدفمند مدرج پیزوالکتریک تحت بار مکانیکی و بار الکتریکی پرداخته شده است. خواص مکانیکی، الکتریکی و الکترومکانیکی این تیر در راستای ضخامت طبق رابطه تابع کسر حجمی تیرهای مدرج هدفمند متغیر است. معادلات حاکم بر تیر با بکارگیری اصل همیلتون برای دو حالت حسگری و عملگری با اعمال فرضیات روش الاستیسیته دوبعدی به دست آمده و با حل معادلات به روش اجزاء محدود و به کمک تئوری الاستیسیته دوبعدی پاسخ دینامیکی تیر در حوزه‌ی زمان و حوزه‌ی فرکانس مورد بررسی قرار گرفته است. در پاسخ دینامیکی، در حوزه‌ی زمان از روش بتا نیومارک و در حوزه‌ی فرکانس از روش طیف فرکانسی تبدیل فوریه سریع استفاده شده است. تأثیر پارامترهای مختلف از قبیل شاخص کسر حجمی، شرایط مرزی مختلف و نسبت لاغری تیر بر روی پاسخ دینامیکی و فرکانس طبیعی تیر مورد بررسی واقع شده است. نتایج به دست آمده نشان می‌دهد، که تغییر هر کدام از این پارامترها، تأثیر بسزایی بر روی پاسخ دینامیکی و فرکانس طبیعی تیر هدفمند مدرج پیزوالکتریک دارد.

واژگان کلیدی: مواد هدفمند مدرج، پیزوالکتریک، تئوری الاستیسیته دو بعدی، پاسخ دینامیکی، روش اجزاء محدود.

مقدمه

منظور از مواد نو، آن دسته از مواد مهندسی هستند که در سال‌های اخیر به شدت توسعه یافته و دریچه‌ای تازه در مقابل بشر گشوده‌اند. ویژگی‌های منحصر به فرد این مواد مانند استحکام و سختی بالا، انعطاف پذیری و مقاومت به سایش مطلوب، خواص الکتریکی و مغناطیسی جالب و منحصر به فرد، منجر به افزایش علاقه و توجه به این مواد شده است [1]. با استفاده از این مواد می‌توان محصولات کوچک‌تر، سبک‌تر، هوشمندتر و چندمنظوره‌تر تولید کرد. به طور کلی مواد نو را می‌توان به دسته‌های مختلفی از جمله مواد مرکب، مواد هدفمند، مواد هوشمند، و نانومواد تقسیم‌بندی کرد [2]. یکی از پرکاربردترین مواد هوشمند پیزوالکتریک‌ها هستند، این مواد به علت خواص الکترومکانیکی شگفت‌انگیز، انعطاف پذیری بالا و تبدیل انرژی الکتریکی به مکانیکی و برعکس، به عنوان سنسورها و عملگرها در کنترل سیستم‌ها استفاده می‌شود. با افزایش کاربرد سازه‌هایی از جنس مواد هدفمند *FGM* در صنایع پیشرفته از جمله هوافضا، بیوپزشکی، نظامی، کاربردهای مهندسی، انرژی هسته‌ای و... بررسی رفتار این سازه‌ها می‌تواند اهمیت زیادی داشته باشد [3]. بعلاوه که این سازه‌ها غالباً هزینه بالایی جهت طراحی و تولید دارند. یک سازه در معرض نیروهای مختلف استاتیکی و دینامیکی قرار می‌گیرد، بارهای استاتیکی با توجه به ثابت بودن در طول زمان نسبت به بارهای دینامیکی اهمیت چندانی ندارند. زیرا در لحظه طراحی این بارها در نظر گرفته شده و تأثیر آن‌ها اعمال می‌گردد اما در بارگذاری دینامیکی، به دلیل تغییرات بار اعمالی در طول زمان به واسطه خصوصیات تحریک‌بار، سازه همواره در فرکانس‌های مختلفی تحریک می‌شود که ممکن است این فرکانس، یکی از فرکانس‌های طبیعی سازه باشد که باعث بروز حالتی مانند: تغییر شکل پلاستیک در قسمتی از سازه، بروز رفتار غیرخطی در سازه، خستگی و شکست سازه گردد، از این رو می‌بایست رفتار ارتعاش سازه و عوامل مؤثر بر مقدار آن‌ها مورد بررسی قرار گیرد. در این حالت با استفاده از خاصیت پیزوالکتریسته که در ادامه به آن اشاره خواهد شد، می‌توان فرکانس‌های طبیعی و کرنش‌های مکانیکی سازه را کنترل نمود. و بعنوان حسگرها و عملگرهای با مقاومت بالا، سختی زیاد و وزن کم (همراه با خاصیت خود بازبینی و خودکنترلی) در صنایع مختلف به کار برد [4]. در این تحقیق با استفاده از اجزاء محدود براساس تئوری الاستیسیسته دوبعدی، پاسخ دینامیکی تیر مدرج پیزوالکتریکی تحت بار مکانیکی و بار الکتریکی بررسی شده است.

۱- پیشینه تحقیق

از مواد پیزوالکتریک که دارای قابلیت پاسخ‌دهی سریع در میدان الکتریکی می‌باشد، به طور گسترده در سازه‌ها به عنوان سنسور و عملگر به کار می‌رود. در سال ۱۹۹۵ یک نوع عملگر جدید با مواد مدرج هدفمند پیزوالکتریک^۱ به صورت یک لایه و چندلایه گسترش یافت که ثابت ترموالکتروالاستیک آن در امتداد ضخامت لایه به صورت یکنواخت و پیوسته تغییر می‌کرد. زیو^۲ و منگ^۳ گزارش ساخت یک عملگر مدرج تابعی هدفمند پیزوالکتریک براساس سرامیک‌های پیزوالکتریک *PNN-PZT* با استفاده از روش متالوژی پودر بیان کردند و مشخصات تغییر مکان و چگونگی توزیع ترکیبات در مقطع عرضی را بررسی کردند [5-7]. در آن زمان انواع دیگر تکنولوژی ساخت عملگرها پیشنهاد شد و با موفقیت اجرا شد [8]. که با روش‌های تئوری و تجربی دوام و قابلیت اطمینان و عملکرد تحریک عملگرها را با استفاده از خاصیت مدرج تابعی هدفمند پیزوالکتریکی بهبود بخشیدند.

پژوهش‌های تحلیلی، عددی و تجربی زیادی در زمینه تجزیه و تحلیل رفتار الکتروالاستیک و الکتروپنایمیک عملگرها انجام شده است [9-10]. شی^۴ و همکارانش (۲۰۰۲-۲۰۰۴) راه حل‌های فرم بسته برای تیر هدفمند پیزوالکتریک یک سر درگیر با شیب خطی در چگالی جرمی [11] یا ضریب پیزوالکتریک [12] *g31* با استفاده از تئوری دوبعدی الاستیسیسته و تابع تنش ایری به دست آوردند. هیوک^۵ و همکارانش (۲۰۰۰) نتایج تجربی و فرمول‌بندی رگرسیون خطی را برای محاسبه انحراف نوک تیر هدفمند پیزوالکتریک یک سر گیردار با ثابت پیزوالکتریک متفاوت خطی به دست آوردند [13].

جوشی^۶ و همکارانش (۲۰۰۳) راه حل‌های دقیق برای خمش ناشی از القای الکتریکی و خمش ترموالکتریک برای تیر چندلایه‌ای که شامل یک زیر لایه، یک لایه *FGM* و یک لایه فعال پیزوالکتریک بود را بیان کردند و نشان دادند، قدرت راه اندازی عملگر به طور معنی داری تحت تأثیر نوع ترکیب لایه‌های *FGM* و اثر حرارت می‌باشد [14,15]. با فرض اینکه عملگر مدرج تابعی هدفمند پیزوالکتریک (*FGPM*) یک تیر چندلایه‌ای است که خواص هر لایه ثابت است، لی^۷ (۲۰۰۵) با استفاده از روش المان محدود خطی *layerwise* پاسخ تغییر مکان و

¹ FGPM² Zhu³ Meng⁴ Shi⁵ Hauke⁶ Joshi⁷ Lee

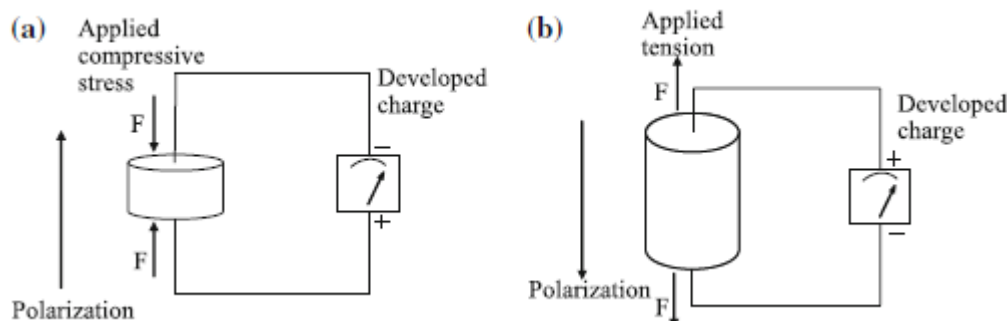
تنش یک عملگر دولایه *FGPM* (در راستای ضخامت) تحت بار ترموالکتریک به دست آوردند [12]. تایا^۸ (۲۰۰۳) همچنین با استفاده از مدل تیر چندلایه‌ای خمش عملگرهای دوشکل *FGPM* سیلندری را بررسی کرد، میدان تنش و میدان تغییر مکان خارج از صفحه را با استفاده از روش دو مرحله‌ای سلسله مراتبی به دست آورد [16]. لی (۲۰۰۵) به صورت تجربی عملکرد عملگر تک لایه مدرج هدفمند پیزوالکتریک که با استفاده از روش رسوبدهی الکتروفوریتیک ساخته بود را در حالت استاتیکی و دینامیکی مورد بررسی قرار داد [17]. یانگ^۵ و ایگران^۶ (۲۰۰۷) خمش استاتیکی و ارتعاش آزاد و پاسخ دینامیکی انواع مختلف عملگر *FGPM* تحت بار ترموالکتریک را با استفاده از تئوری تیر تیموشنکو بررسی کردند [18].

ملاحظه می‌شود که بیشتر مطالعات پیشین تنها تحلیل استاتیکی عملگر یک سرگردار *FGPM* بررسی شده است و تحلیل دینامیکی عملگر *FGPM* کم و محدود است. در این تحقیق با استفاده از روش اجزا محدود براساس تئوری الاستیسیته دوبعدی، پاسخ دینامیکی تیر مدرج هدفمند پیزوالکتریک تحت بارگذاری مکانیکی و الکتریکی را در شرایط مرزی متفاوت مورد بررسی قرار می‌گیرد.

۲- مواد پیزوالکتریک

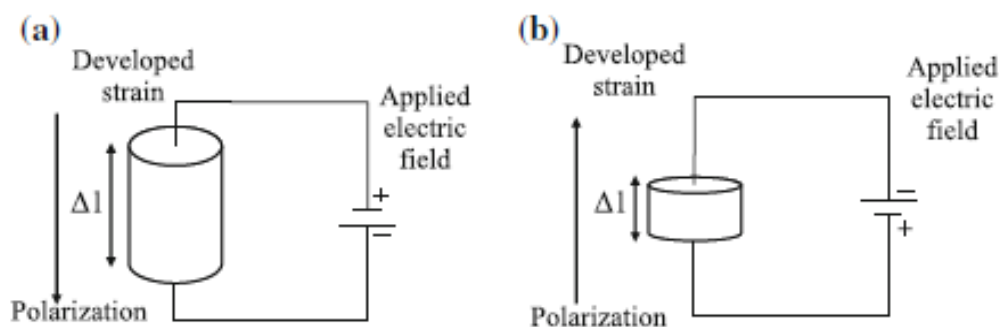
اولین استفاده‌ی عملی از دستگاه‌های پیزوالکتریک، سونار (دستگاه کاشف زیردریایی به وسیله امواج صوتی) بود که در جنگ جهانی اول توسعه پیدا کرد. در سال ۱۹۱۷ در فرانسه پائول لانگ وین و همکارانش روی یک آشکارگر ماوراء صوت کار کردند. دستگاه از یک مبدل ساخته شده بود که از کریستال‌های نازک کوارتز که با دقت بین دو صفحه‌ی نازک فولاد متصل شده بودند و یک هیدروفن (دستگاهی که اصوات زیر آب را ثبت می‌کند) برای شناسایی و بازگرداندن انعکاس صوت، تشکیل شده بود. با فرستادن صوت فرکانس بالا از مبدل و اندازه‌گیری مدت زمان رفت و برگشت صدا می‌توان فاصله تا شیء مورد نظر را اندازه‌گیری کرد [19].

اثر پیزوالکتریک توانایی برخی مواد می‌باشد، برای تبدیل انرژی مکانیکی به انرژی الکتریکی و تبدیل انرژی الکتریکی به انرژی مکانیکی. اصطلاح پیزوالکتریک ترکیبی از دو کلمه *piezo* (که در زبان یونان معادل فشار است) و *electricity* می‌باشد. وقتی ماده پیزوالکتریک تحت تأثیر استرس یا کشش مکانیکی قرار می‌گیرد؛ به صورت الکتریکی قطبیده (پلاریزه) می‌شود و منجر به تولید بارهای الکتریکی متناوب بر وجه‌های مخالف آن می‌شود. این را اثر مستقیم پیزوالکتریک می‌گویند. اگر ماده تحت فشار قرار گیرد، ولتاژی در راستای قطبیت آن در دوسر ماده به وجود می‌آید (شکل ۱) و اگر ماده کشیده شود ولتاژی در جهت مخالف با قطبیت ماده در آن ایجاد می‌گردد.



شکل ۱- اثر مستقیم پیزوالکتریک (a) با اعمال تنش فشاری، (b) با اعمال کشش [20]

از طرفی هنگامی که ماده پیزوالکتریک با استفاده از یک ولتاژ مولد در معرض یک میدان الکتریکی قرار گیرد، تغییر شکل فشاری یا کششی (متناسب با میدان) در آن ایجاد می‌شود، را اثر معکوس پیزوالکتریک گویند. در شکل ۲ ولتاژی مخالف با قطبیت ماده اعمال شده و منجر به کشیده شدن آن و در شکل ۳ ولتاژ با جهت یکسان با قطبیت ماده به فشرده شدن آن منجر گردیده است [3].



شکل ۲- اثر معکوس پیزوالکتریک با به کاربردن میدان الکتریکی [3]

۳- مواد هوشمند و مواد هدفمند

هوشمند^۱ باهوش و حساس، همه برای تعریف ساختارها و مصالحی به کار می‌روند، که شامل حسگرها و محرک‌ها بوده و توانایی سازگاری با تحریکات خارجی مانند بارها و تحریکات محیط را دارند. در واقع مواد هوشمند موادی هستند که توانایی درک و پردازش رویدادهای محیطی را داشته و نسبت به آن واکنش مناسب نشان می‌دهند. به عبارت دیگر این مواد قابلیت تغییرپذیری دارند و قادر هستند، شکل، فرم، رنگ و انرژی درونی خود را به طرز برگشت پذیر در پاسخ به تأثیرات فیزیکی و یا شیمیایی محیط اطراف تغییر دهند. اگر مواد را به سه گروه غیر هوشمند، نیمه هوشمند و هوشمند طبقه بندی کنیم؛ گروه اول یعنی مواد غیر هوشمند ویژگی‌های خاص بالا را ندارند. نیمه هوشمندها تنها قادرند در پاسخ به تأثیرات محیطی شکل و فرم خود را برای یک بار یا مدت اندکی تغییر دهند اما در مواد هوشمند این تغییرات تکرار پذیر و قابل برگشت خواهد بود. از جمله محرک‌های که مواد هوشمند در برابر آنها عکس العمل نشان می‌دهند، عبارت‌اند از: تغییر محیط شیمیایی، میدان مغناطیسی، میدان الکتریکی، فشار، حرارت، نور و اشعه ماوراء بنفش. آلیاژهای حافظه دار، مواد مگنتواستریکتیو، سیالات هوشمند (مگنتورئولوژیکال و الکترو رئولوژیکال) و مواد پیزوالکتریک نمونه‌هایی از متداول ترین مواد هوشمند هستند [21].

در سال ۱۹۳۲ اولین مشاهدات ثبت شده درباره پدیده حافظه داری شکلی در آلیاژی از طلا و کادمیوم^۹ بود و بوهرلر^{۱۰} و همکارانش^۱ در سال ۱۹۶۰ در آزمایشگاه مهمات نیروی دریایی ایالات متحده به بررسی پدیده حافظه داری شکلی در آلیاژ تیتانیوم و نیکل که دارای اتم‌های برابر می‌باشند، پرداختند و نام تجاری نیتینول (مخفف نیکل تیتانیوم آزمایشگاه مهمات نیروی دریایی) به کار بردند. در این هنگام تحقیق درباره متالوژی و کاربردهای عملی اولیه آن به طور جدی آغاز شد. فلز حافظه دار، آلیاژی است که می‌تواند در دمای پایین تغییر شکل دهد و سپس با قرار دادن آن در معرض حرارت به شکل اولیه خود باز گردد. خاصیت حافظه داری در این آلیاژها به وسیله تغییر موقعیت فاز جامد است، که در آن چیدمان مجدد مولکولی رخ می‌دهد. آلیاژهای حافظه دار، دارای دو فاز ثابت می‌باشند. فاز در دمای بالا که آستنیت^۲ نامیده می‌شود، که ساختمان آن مکعبی بوده و به علت دارا بودن تقارن بالا محکم تر است. فاز با دمای پایین که مارتنزیت^۳ نامیده می‌شود و نسبت به آستنیت تقارن کمتری دارد. در پدیده حافظه داری، نمونه در حالت کاملاً مارتنزیتی به مقدار معینی تغییر فرم داده می‌شود سپس با گرم کردن نمونه و برگشت آن به حالت آستنیتی، شکل نمونه نیز به حالت اول خود بر می‌گردد [22].

۴- تعریف و فرمول بندی مسئله

معادلات حرکت بر سیستم‌های دینامیکی را می‌توان از روش‌های مختلفی استخراج نمود. به عنوان مثال، شرایط تعادل را می‌توان بر پایه‌ی اصل دالامبر، بر پایه اصل تغییر مکان‌های ممکن و یا بر پایه اصل تغییرات هامیلتون بیان کرد. شیوه‌ی اول برای سیستم‌های با تعداد درجات آزادی کم مناسب می‌باشد. در حالی که برای سیستم‌های پیچیده دینامیکی با تعداد درجه آزادی زیاد از روش دیگر استفاده می‌گردد [20].

فرمول بندی پژوهش حاضر بر مبنای اصل تغییرات هامیلتون می‌باشد. در اصل همیلتون، تابع لاگرانژ به ازای تغییر مکان‌های ممکن شرایط سازگاری و شرایط ضروری یا سینماتیکی را در فاصله زمانی دلخواه t_1 تا t_2 تأمین می‌کند. اصل همیلتون توسط رابطه زیر بیان می‌شود: [21].

⁹ AuCd¹⁰ Buhler

$$\delta \int_{t_1}^{t_2} L dt = 0 \quad (1)$$

L تابع لاگرانژ است و با استفاده از تاریخچه‌های زمانی مجاز جابه‌جایی‌ها به دست می‌آید به‌طوری‌که:

$$L = T - \Pi + Wf \quad (2)$$

T انرژی جنبشی و Π انرژی پتانسیل است و Wf کار انجام شده توسط نیروهای خارجی می‌باشد. در این پژوهش عبارات معادله ۲ را براساس دو اثر مکانیکی و الکتریکی بیان می‌کنیم. این اثرات پاسخ نهایی مدل را بیان می‌کنند که در ادامه به آن خواهیم پرداخت. انرژی جنبشی کل دامنه مسئله به فرم انتگرال زیر تعریف می‌شود [23]:

$$\iiint \dot{U}^T [\rho] \dot{U} dv \frac{1}{2} T = \quad (3)$$

که در آن v نشان‌دهنده حجم جسم جامد و U مجموعه‌ای از تاریخچه زمانی جابه‌جایی‌های مجاز است. انرژی پتانسیل (کرنش) در کل دامنه جامدهای الاستیک و سازه‌ها را می‌توان به‌صورت زیر بیان کرد:

$$\iiint \varepsilon^T c \varepsilon dv \frac{1}{2} = \iiint \varepsilon^T \sigma dv \frac{1}{2} = \Pi \quad (4)$$

ε کرنش می‌باشد و با استفاده از مجموعه‌ای تاریخچه زمانی جابه‌جایی‌های مجاز به دست می‌آید و c ماتریس مدول الاستیک است. کار نیروهای خارجی را می‌توان با استفاده از مجموعه تاریخچه‌های زمانی جابه‌جایی مجاز به دست آورد:

$$\iiint U^T f_b dv + \iiint U^T f_s ds = W_f \quad (5)$$

مفهوم اصل همیلتون بر این اساس است، که مجموعه تغییرات انرژی‌های جنبشی و پتانسیل سیستم و کار انجام شده توسط نیروهای غیر پتانسیل (نظیر نیروهای میرایی و بارهای خارجی دلخواه) در فاصله زمانی $\Delta t = t_2 - t_1$ برابر صفر است. از این اصل به‌طور گسترده در معادلات سیستم‌ها به کار می‌رود زیرا که روابط در تابع لاگرانژ معمولاً از مشتق با مرتبه پایین‌تر نسبت به مرتبه مشتق در معادله دیفرانسیل متعادل مسئله مربوطه برخوردار است [24].

همچنین اصل همیلتون یکی از پرکاربردترین اصل‌ها است که در روش اجزا محدود به کار می‌رود، با به دست آوردن فرم ضعیف معادله حرکت، که توابع ساده‌ای به‌صورت چندجمله‌ای برحسب تغییر مکان‌های مجهول و یا مشتقات آن‌ها در گره‌ها می‌باشد. نخست رفتار هر یک از المان‌ها را به‌صورت معادله و به‌طور مستقل به دست آورده و سپس با توجه به ترتیب قرارگیری اجزا در کنار یکدیگر (با سوار کردن المان‌های فوق) معادلات فوق به هم مربوط می‌شوند، تا معادلات کل سیستم به دست آید. ابتدا روش و فرمول‌بندی اجزا محدود را برای اثر مکانیکی بیان می‌کنیم، سپس عبارات انرژی پتانسیل و کار نیروهای خارجی ناشی از اثرات الکتریکی را در ادامه مورد بحث قرار می‌دهیم. فرمول‌بندی کل ساختار براساس سیستم مختصات دکارتی می‌باشد، اما برای المان‌ها به‌طور جداگانه مختصات محلی در نظر می‌گیریم. براساس سیستم مختصات محلی می‌توان موقعیت هر نقطه دلخواه برحسب مختصات گره‌ها بیان کرد در ادامه به این موضوع می‌پردازیم. تغییر مکان گره‌ها را می‌توان با استفاده از چندجمله‌ای درونیایی زیر به دست می‌آورد: [25]

$$U^h(x, y, z) = \sum_{i=1}^{n_d} N_i(x, y, z) d_i = N(x, y, z) d_e \quad (6)$$

۵- معادلات حاکم بر تیر FGPM

معادلات دینامیکی یک ساختار پیزوالکتریک را می‌توان از اصل همیلتون که در آن لاگرانژ و کار مجازی به‌خوبی شامل اثر الکتریکی است، به دست آورد. همان‌گونه که به فرمول‌بندی برای اثر مکانیکی در بخش قبل اشاره شد. با وجود اثر الکتریکی برخی تغییرات در معادلات به وجود می‌آید، با ذکر جزئیات بیشتر در این بخش مطرح می‌شود. براساس این اصل تغییر مکان‌ها و پتانسیل‌های الکتریکی با معادلات زیر به دست می‌آید: [26]

$$\delta \int_{t_1}^{t_2} L dt + \int_{t_1}^{t_2} \delta w dt = 0 \quad (7)$$

که در آن L تابع لاگرانژ و w کار خارجی توسط نیروی الکتریکی و نیروی مکانیکی تعریف می‌شود و δ نشان‌دهنده تغییرات می‌باشد و لاگرانژ به صورت زیر تعریف می‌شود: [27]

$$L = \iiint \left(\frac{1}{2} \rho \dot{U}^T \dot{U} - H \right) d\Omega \quad (8)$$

عبارت H و U به ترتیب نشان‌دهنده بردار آنتالپی الکتریکی و بردار تغییر مکان می‌باشند. انتگرال گیری معادله (۹) در حجم Ω و سطح S ساختار پیزوالکتریک انجام می‌گیرد، که در معرض بار متمرکز (f_p) و شار سطحی (q) قرار گرفته است و δw کار نیروهای خارجی به صورت زیر بیان می‌شود:

$$= \iint \cdot (-\delta \varphi^T q) ds + \{\delta u\} f_p \delta w \quad (9)$$

و پتانسیل الکتریکی می‌باشد. آنتالپی به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$H = P - E^T D \quad (10)$$

E بردار میدان الکتریکی و D بردار جابجایی الکتریکی و P انرژی پتانسیل می‌باشد و داریم:

$$P = \frac{1}{2} \varepsilon^T \sigma + \frac{1}{2} E^T D \quad (11)$$

ε و σ به ترتیب تانسورهای مرتبه دوم کرنش و تنش می‌باشند. با جایگذاری معادله ۱۰ در معادله ۱۱ سپس معادله به دست آمده را در معادله ۱۲ جایگذاری کرده و خواهیم داشت: [28]

$$L = \iiint \left(\frac{1}{2} \rho \dot{U}^T \dot{U} - \frac{1}{2} \varepsilon^T \sigma + \frac{1}{2} E^T D \right) d\Omega \quad (12)$$

علاوه بر این با جایگذاری کردن معادله ساختاری ماده پیزوالکتریک لاگرانژ به صورت زیر بیان می‌شود: [29]

$$L = \iiint \left(\frac{1}{2} \rho \dot{U}^T \dot{U} - \frac{1}{2} \varepsilon^T C \varepsilon + \frac{1}{2} \varepsilon^T e e + \frac{1}{2} E^T e e + \frac{1}{2} E^T k E \right) d\Omega \quad (13)$$

و با جایگذاری کردن هر دو معادله (۱۲) و (۱۳) در اصل همیلتون نتیجه می‌گیریم که: [30]

$$\int_{t_1}^{t_2} \left(\iiint \left(\frac{1}{2} \rho \delta \dot{U}^T \dot{U} - \frac{1}{2} \varepsilon^T C \varepsilon + \frac{1}{2} \varepsilon^T e e + \frac{1}{2} E^T e e + \frac{1}{2} E^T k E \right) d\Omega \right) dt + \int_{t_1}^{t_2} \left(\iint \cdot (-\delta \varphi^T q) ds + \{\delta u\} f_p \right) dt = 0 \quad (14)$$

برای کامل کردن فرمول بندی روش تغییرات برای یک ساختار پیزوالکتریک عبارت اول معادله به صورت زیر بیان می‌شود:

$$\int_{t_1}^{t_2} \rho \delta \dot{U}^T \dot{U} dt = \rho \delta U^T \dot{U} \Big|_{t_1}^{t_2} - \int_{t_1}^{t_2} \rho \delta U^T \ddot{U} dt = - \int_{t_1}^{t_2} \rho \delta U^T \ddot{U} dt \quad (15)$$

نتیجه نهایی روش تغییرات مدل پیزوالکتریک با جایگزین کردن معادله به صورت زیر می‌باشد:

$$\int_{t_1}^{t_2} \left(\iiint \left(-\frac{1}{2} \rho \delta U^T \ddot{U} - \frac{1}{2} \varepsilon^T C \varepsilon + \frac{1}{2} \varepsilon^T e e + \frac{1}{2} E^T e e + \frac{1}{2} E^T k E \right) d\Omega \right) dt + \int_{t_1}^{t_2} \left(\iint \cdot (-\delta \varphi^T q) ds + \{\delta u\} f_p \right) dt = 0 \quad (16)$$

معادله که از اصل همیلتون در میدان الکترواستاتیک به دست آمد اولین معادله ضروری مطالعه‌ای حاضر است و دومین معادله از قانون الکتریسته ماکسول به حالت زیر است.

$$\nabla \cdot D = 0 \quad (17)$$

E میدان الکتریکی نیز از تابع اسکالر پتانسیل الکتریکی φ به دست می آید.

$$E = -\nabla\varphi \quad (۱۸)$$

۶- معادلات نهایی

معادلات حاکم بر تیر مدرج هدفمند با خاصیت پیزوالکتریک معادلات پیشین می باشند، $[M_{uu}]$ ماتریس جرم که به خواص مخصوص ماده بستگی دارد. ماتریس سختی به خواص مکانیکی، الکتریکی و الکترومکانیکی ماده مورد نظر وابسته است به طوری که $[K_{uu}]$ ماتریس سختی مکانیکی، $[K_{u\varphi}]$ ماتریس کوپلینگ الکتریکی- مکانیکی و $[K_{\varphi\varphi}]$ ماتریس ثابت دی الکتریک و $\{f_m\}$ و $\{f_q\}$ به ترتیب بردارهای نیروی مکانیکی و نیروی الکتریکی می باشند و با جاگذاری معادلات و حذف $\{\varphi_{ie}\}$ معادلات به فرم زیر خواهد بود:

$$[M_{uu}]\{\ddot{u}_{ie}\} + [K_{eq}]\{u_{ie}\} = \{f_{eq}\} \quad (۱۹)$$

$$[K_{eq}] = [K_{uu}] + [K_{u\varphi}][K_{\varphi\varphi}]^{-1}[K_{\varphi u}] \quad (۲۰)$$

$$\{f_{eq}\} = \{f_m\} - [K_{u\varphi}][K_{\varphi\varphi}]^{-1}\{f_q\} \quad (۲۱)$$

جهت تعیین فرکانس های طبیعی سیستم، ماتریس نیروها را در معادله ۱۹ حذف کرده و پاسخ سیستم به صورت زیر فرض می شود:

$$U_{ie} = C e^{i\omega t} \quad (۲۲)$$

با استفاده از این فرضیات در معادله حاکم جدید فرکانس های طبیعی سیستم محاسبه می شود.

$$\omega_{ie} = \text{eig} \left(\sqrt{[K_{eq}] / [M_{uu}]} \right) \quad (۲۳)$$

۷- شرایط مرزی

در مکانیک جامدات شرایط مرزی را می توان به صورت شرایط مرزی اساسی (هندسی) و شرایط مرزی طبیعی (نیرویی) تقسیم بندی کرد. در مسائلی که به روش باقیمانده وزنی حل می شوند، باید دو شرط مرزی اساسی و طبیعی ارضاء شوند. در حالی که در روش تغییرات، احتیاجی به ارضاء شرایط مرزی طبیعی نیست. چرا که با توجه به معادله تعادل، این شرایط به صورت ذاتی در تابع مورد استفاده مستقر می باشند. در این پایان نامه سه نوع شرط مرزی بررسی می شود.

الف) تکیه گاه ساده- s

ب) تکیه گاه گیردار- c

ج) تکیه گاه آزاد- f

ارتعاشات اجباری یک سازه در حالت کلی در دو حوزه زمان و فرکانس بررسی می شود. در حوزه زمان جابجایی های اجزای سیستم در یک بازه زمانی که در محدوده اعمال نیرو می باشند، بررسی می شود و در حوزه فرکانس این جابجایی ها در یک بازه فرکانسی مورد بررسی قرار می گیرد. برای بررسی ارتعاشات اجباری در حوزه زمان دو روش عمده ویلسون و نیومارک را می توان به کاربرد.

با توجه به نتایج به دست آمده از روش نیومارک و کارهای قبلی و دقت این روش در مقایسه با نتایج حل تحلیلی، در این پایان نامه از روش بتا نیومارک بر پایه حل عددی ضمنی بهره گرفته می شود و در حوزه فرکانس از روش سری فوری سریع استفاده می شود. تشخیص فرکانس های تشکیل دهنده یک سیگنال در حوزه زمان غیرممکن است، از این رو با تبدیل سیگنال از حوزه زمان به حوزه فرکانس موجب مشخص شدن فرکانس های تشکیل دهنده یک سیگنال می شود. در قرن ۱۹ میلادی، یک ریاضی دان فرانسوی به نام جوزف فوریه نشان داد که هر تابع متناوب را می توان بر حسب مجموع نامتناهی از توابع پایه سینوسی و کسینوسی (و یا تابع نمایی متناوب مختلط) نوشت.

با استفاده از آنالیز فوریه یک سیگنال می توان مجموعه ای نامتناهی از تابع نمایی مختلط یا موج های سینوسی و کسینوسی تشکیل دهنده آن را استخراج کرد و از روی موج های سینوسی و کسینوسی نیز می توان فرکانس های تشکیل دهنده سیگنال را به دست آورد. تبدیل فوریه سیگنال پیوسته در زمان $U(t)$ به صورت زیر به دست آید:

$$U(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} U(t) e^{-i\omega t} dt \quad (۲۴)$$

که در آن t زمان و ω فرکانس است همچنین با عکس تبدیل فوری، می توان سیگنال زمانی را به صورت یکتا تعیین کرد. سال ها بعد از کشف این خاصیت شگفت انگیز توابع متناوب این ایده تحت عنوان تبدیل فوری به سایر توابع نیز تعمیم داده شد. پس از این تعمیم بود که تبدیل فوری به عنوان ابزاری کارآمد در محاسبات کامپیوتری وارد گردید. در اوایل دهه ۱۹۷۰ بعد از آنکه جوزف فوریه ایده خود را مطرح نمود، یک الگوریتم سریع به نام الگوریتم کولی-تولی ارائه شد که کاربرد عملی آن را ممکن ساخت. که نشان گر تبدیل فوری سریع (FFT) می باشد. در منحنی های طیف فرکانسی که از الگوریتم تبدیل فوری سریع به دست می آید، محور افقی فرکانس و محور عمودی اندازه ی فرکانس را نمایش می دهد [50].

۸- بخش آزمایشی

آزمایش ارتعاشات در آزمایشگاه مکانیک، با رعایت تمام اصول فعالیت آزمایشگاهی، انجام شد. شکل ۳ تست ماشینین را نشان داده که به کامپیوتر وصل است و نتیجه با کمترین خطا نشان داده شده است. دمای اتاق و دیگر م وارد نیز مورد نظر است. در اولین شکل از قسمت بعدی، ضمن اعلام نتایج، صحت سنجی نیز انجام شده است.

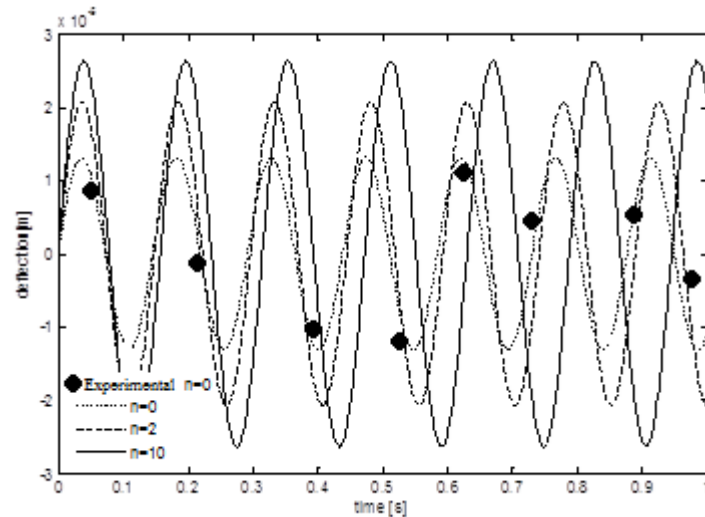


شکل ۳- دستگاه تست تیر پیزوالکتریک

نتایج و بحث

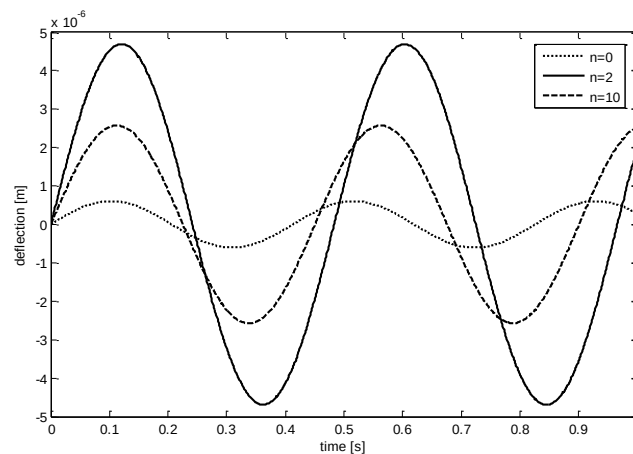
در این بخش ابتدا همگرایی این روش حل مورد بررسی قرار گرفته شده، سپس پاسخ دینامیکی تیر FGPM با شرایط مرزی مختلف و بارگذاری مختلف مکانیکی و الکتریکی را در حوزه ی زمان با روش بتا-نیومارک با مقادیر پارامتر $\gamma=1/2$ ، $\beta=1/4$ و در حوزه ی فرکانسی با آنالیز طیف فرکانسی تیر FGPM مورد بررسی قرار می گیرد و به بررسی اثر پارامترهای مختلف از جمله نسبت اجزای سازنده ی ماده، ابعاد تیر را بر ارتعاشات و پاسخ دینامیکی تیر FGPM پرداخته می شود. PZT-4 و PZT-5H به عنوان مواد تشکیل دهنده ی تیر FGPM انتخاب شده است. اجزای مواد سازنده ی تیر PZT-4/۱۰۰ در سطح بالا و PZT-5H/۱۰۰ در سطح پایین تیر استفاده شده است.

پاسخ دینامیکی تیر FGPM دوسر در گیر با مقدار $L=0.12\text{ m}$ و $h=0.01\text{ m}$ و $st=0.001\Delta$ به ازای مقادیر مختلف توان کسر حجمی که در معرض نیروی هارمونیک مکانیکی به بزرگی 10 kNm^{-2} متمرکز در وسط تیر قرار گرفته است را در شکل ۳ نشان داده شده است. همان طور که مشاهده می شود با افزایش شاخص کسر حجمی مقدار جابجایی تیر FGPM افزایش می یابد زیرا مقدار ماده PZT-5H افزایش می یابد و این ماده دارای صلبیت (استحکام) کمتری نسبت به ماده ی PZT-4 است و در نتیجه انحراف مرکزی تیر افزایش می یابد. در شکل ۴ پاسخ دینامیکی تیر FGPM دوسر در گیر که در معرض بار الکتریکی به بزرگی ۷۰۰ قرار گرفته است را نشان می دهد. مطابق شکل وقتی تیر FGPM در معرض ولتاژ خروجی قرار می گیرد، مقدار جابجایی تحت تأثیر ضریب الکتریکی پیزوالکتریک و بار الکتریکی خارجی می باشد. در مقادیر شاخص کسر حجمی $t=0.2$ مقدار جابجایی افزایش می یابد اما برای مقادیر بیشتر از ۲ مقدار جابجایی کاهش می یابد. آزمایش در حالت $n=0$ انجام شده و صحت سنجی نتیجه مناسبی به دست می دهد.



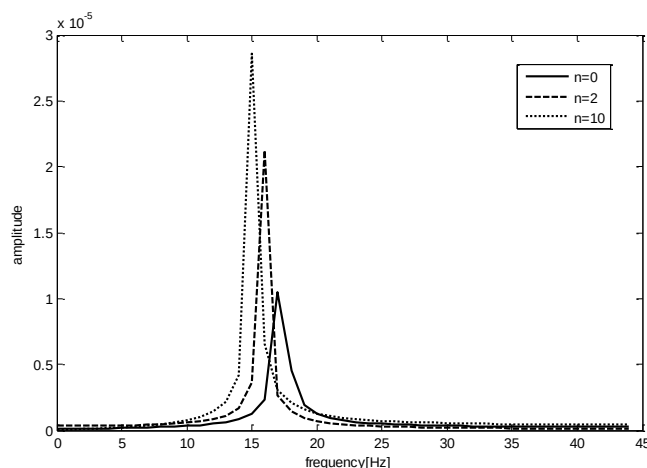
شکل ۴- تاریخچه زمانی و صحت سنجی جابجایی نقطه مرکزی تیر FGPM تحت بار مکانیکی (10 kNm^{-2}) در حالت دو سر گیردار در مقادیر مختلف n (شاخص کسر حجمی) ($h=0.01$ و $L=0.12$)

اطمینان از صحت روش کار اثبات شده و لذا به توجه به این مورد، می توان ادامه فعالیت را انجام داد.

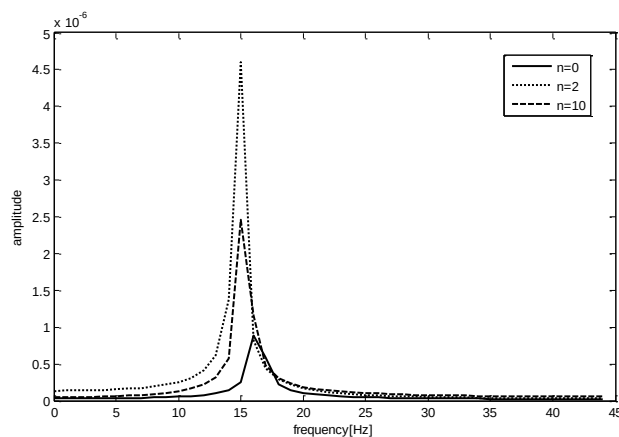


شکل ۵- تاریخچه زمانی جابجایی نقطه مرکزی تیر FGPM تحت بار الکتریکی (v^{-100}) در حالت دو سر درگیر در مقادیر مختلف n (شاخص کسر حجمی) ($h=0.01$ و $L=0.12$)

تأثیر توان کسر حجمی بر نمودار طیف فرکانسی تیر FGPM تحت نیروی متمرکز هارمونیک مکانیکی در وسط تیر تحت شرایط مرزی دو سر درگیر در شکل ۶ رسم شده است. در این بررسی فرکانس طبیعی تیر FGPM در نمودار fft مقدار $18,33\text{ Hz}$ است و فرکانس رزونانس می باشد که در این مقدار فرکانس شدت دامنه ارتعاشات به حد ماکزیمم رسیده است و با افزایش شاخص کسر حجمی بیشینه دامنه ارتعاشات افزایش می یابد و فرکانس سیستم کاهش می یابد. همچنین در شکل ۶ نمودار طیف فرکانسی تیر FGPM در معرض نیروی الکتریکی تحت شرایط مرزی دو سر درگیر نشان داده شده است، تغییرات فرکانس نسبت به بزرگی ارتعاش در این نمودارها بیان شده است. فرکانس طبیعی تیر FGPM در نمودار fft مقدار $16,12\text{ Hz}$ است، و فرکانس رزونانس می باشد که شدت دامنه ارتعاشات به حد ماکزیمم رسیده است و در مقادیر ۰ تا ۲ شاخص کسر حجمی بیشینه دامنه ارتعاشات افزایش می یابد و فرکانس سیستم کاهش می یابد و برای مقادیر شاخص کسر حجمی بیشتر از ۲ دامنه ارتعاشات کاهش می یابد و فرکانس سیستم افزایش می یابد.

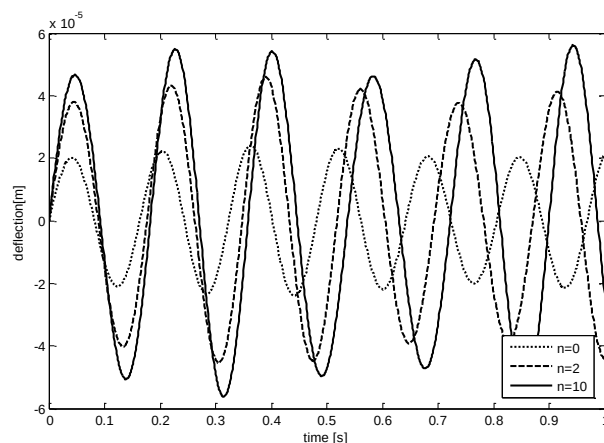


شکل ۶- طیف فرکانسی تیر دوسرگیردار FGPM تحت نیروی مکانیکی (10 kNm^{-2}) در مقادیر مختلف کسر حجمی ($L=0.12$ و $h=0.01$)

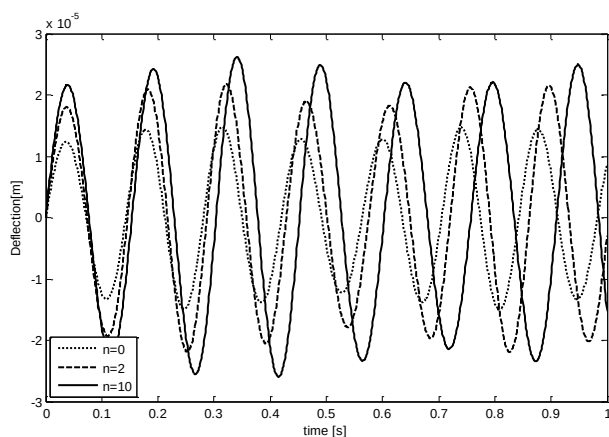


شکل ۷- طیف فرکانسی تیر دوسرگیردار FGPM تحت نیروی الکتریکی (100^+ v) در مقادیر مختلف کسر حجمی ($L=0.12$ و $h=0.01$)

شکل ۶ تاریخچه زمانی تیر دو سرگیردار که تحت نیروی الکتریکی و نیروی متمرکز مکانیکی قرار گرفته، به ازای مقادیر مختلف $n=0$ و $n=10$ ارائه شده است. مشاهده می شود که با در نظر گرفتن نیروی الکتریکی و نیروی متمرکز مکانیکی دامنه نوسانات و همچنین دوره تناوب نسبت به حالتی که تیر دوسرگیردار فقط تحت بار مکانیکی است افزایش می یابد، درواقع بار الکتریکی یکسان با قطبیت ماده پیزوالکتریک اعمال شده است و باعث کاهش ضخامت تیر می شود. شکل ۷ تیر دوسرگیردار تحت نیروی الکتریکی معکوس و نیروی متمرکز مکانیکی قرار گرفته شده است با در نظر گرفتن نیروی الکتریکی معکوس و نیروی متمرکز مکانیکی که بار الکتریکی مخالف با قطبیت ماده پیزوالکتریک اعمال شده است و باعث کشیده شدن ماده و افزایش ضخامت تیر شده است. دامنه نوسانات و دوره تناوب نسبت به حالتی که تیر دوسرگیردار فقط تحت بار مکانیکی است، کاهش می یابد.

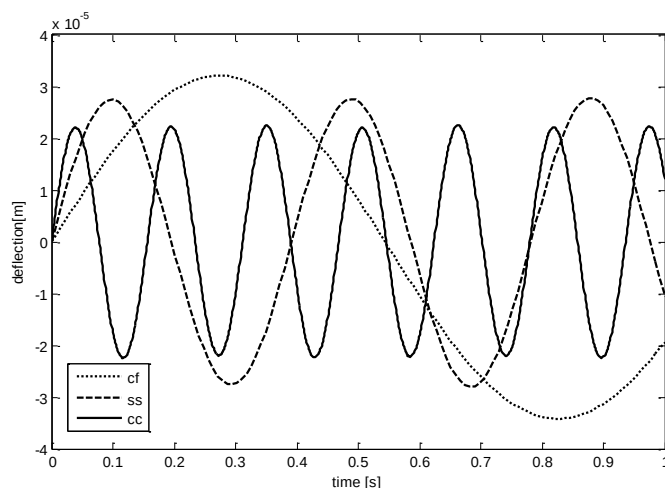


شکل ۸- تاریخچه زمانی جابجایی نقطه مرکزی تیر $FGPM$ تحت بار مکانیکی ($10kNm^{-2}$) و الکتریکی (v^{-100+}) در حالت دو سر درگیر در مقادیر مختلف n (توان کسر حجمی) ($L=0.12$ و $h=0.01$)

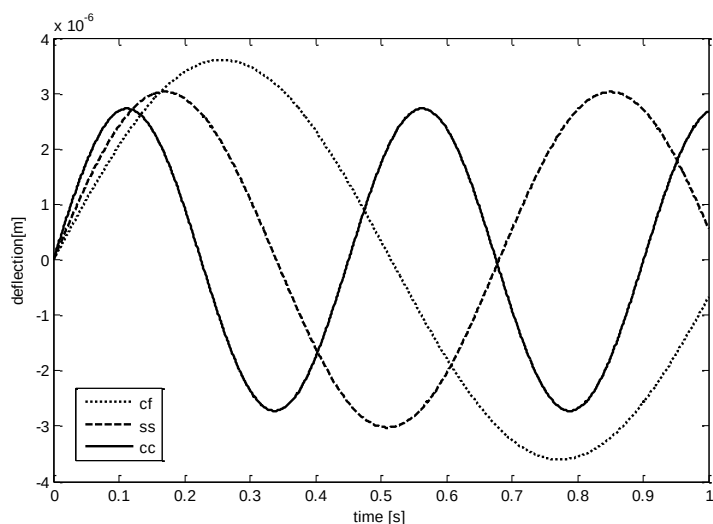


شکل ۹- تاریخچه زمانی جابجایی نقطه مرکزی تیر $FGPM$ تحت بار مکانیکی ($10kNm^{-2}$) و الکتریکی (v^{-100+}) در حالت دو سر درگیر در مقادیر مختلف n (توان کسر حجمی) ($L=0.12$ و $h=0.01$)

در بررسی شرایط مرزی مختلف، انواع شرایط مرزی از جمله تیر $FGPM$ گیردار-گیردار و تیر $FGPM$ ساده-ساده و تیر $FGPM$ گیردار-آزاد به ازای $n=2$ که در شکل ۹ تیر $FGPM$ در معرض بار مکانیکی و در شکل ۱۰ تیر $FGPM$ در معرض بار الکتریکی قرار گرفته است، نشان داده شده است. برای شرایط مرزی گیردار-گیردار دامنه ارتعاشات در مقابل شرایط مرزی تیر ساده-ساده و تیر گیردار-آزاد کمتر می باشد، درواقع هنگامی که تمام نقاط در انتهای تیر گیردار باشد، مانعی در مقابل حرکت (نوسان) به وجود می آید که این در شرایط مرزی تکیه گاه ساده و آزاد نیست. در واقع دوره تناوب ارتعاش در تیر گیردار-آزاد به طور معنی داری بیشتر از تیر ساده-ساده و تیر گیردار-گیردار است که به سمت فرکانس های کمتری سوق داده می شود، همچنین دامنه ارتعاشات تیر ساده-ساده بیشتر از تیر گیردار-گیردار می باشد و فرکانس های طبیعی تیر ساده-ساده کمتر از تیر گیردار-گیردار است.

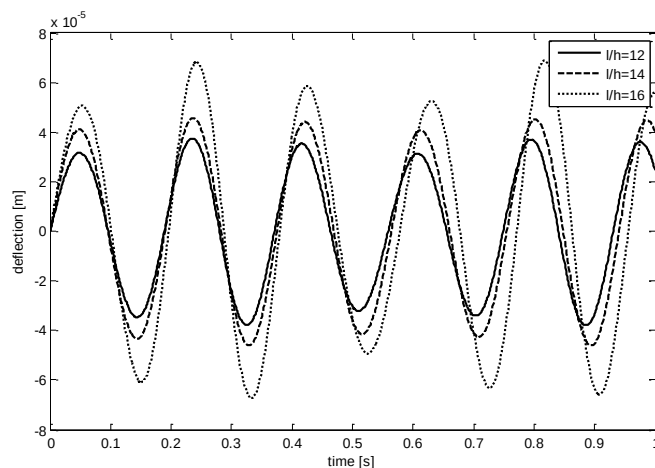


شکل ۱۰- تاریخچه زمانی جابجایی نقطه مرکزی تیر FGPM تحت بار مکانیکی (10 kNm^{-2}) در شرایط مرزی مختلف ($n=2$)
($h=0.01$ و $L=0.12$).

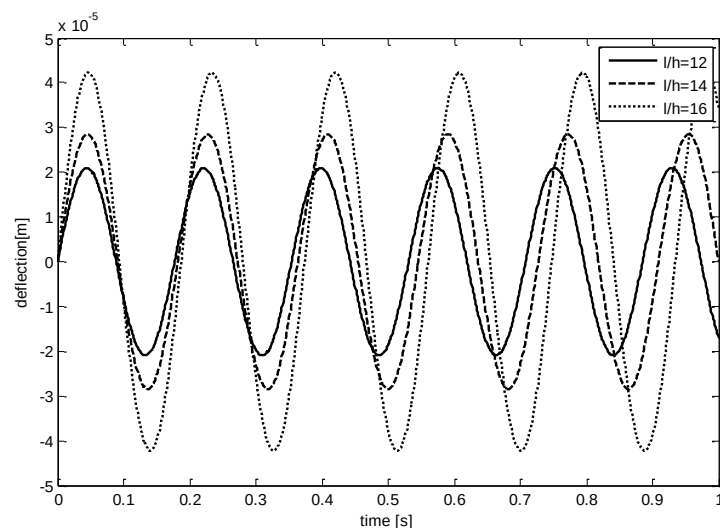


شکل ۱۱- تاریخچه زمانی جابجایی نقطه مرکزی تیر FGPM تحت بار الکتریکی (100^+ V) در شرایط مرزی مختلف ($n=2$)
($h=0.01$ و $L=0.12$).

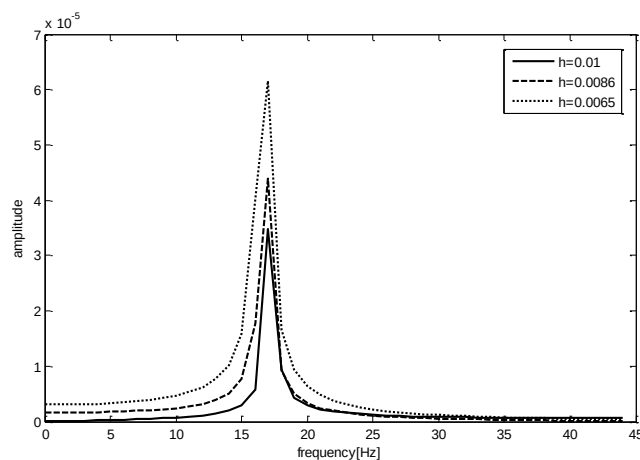
در بررسی پاسخ دینامیکی تیر مدرج هدفمند پیزوالکتریک با در نظر گرفتن مقادیر مختلف نسبت لاغری تیر FGPM تحت نیروهای مختلف بررسی شده است، به طوری که در شکل ۱۲ تیر در معرض بار مکانیکی و الکتریکی قرار گرفته و در شکل ۱۰ تیر در معرض بار مکانیکی می باشد. همان طور که مشاهده می شود، با افزایش نسبت لاغری میزان دامنه ارتعاشات تیر FGPM افزایش می یابد. در بررسی اثر پارامتر هندسی از جمله h ، پاسخ طیف فرکانسی تیر FGPM دوسر گیردار تحت نیروی مکانیکی در وسط تیر به ازای مقادیر مختلف h در شاخص کسر حجمی $n=10$ در شکل ۱۲ ارائه شده است. همان طور که مشاهده می شود، با کاهش ضخامت تیر FGPM مقدار فرکانس طبیعی تیر کاهش می یابد.



شکل ۱۲- تاریخچه زمانی جابجایی نقطه مرکزی تیر FGPM دو سر گیردار تحت بار مکانیکی ($10kNm^{-2}$) و الکتریکی (v^{-100+}) در مقادیر مختلف نسبت لاغری L/h در شاخص کسر حجمی $n=2$



شکل ۱۳- تاریخچه زمانی جابجایی نقطه مرکزی تیر FGPM دو سر گیردار تحت بار مکانیکی ($10kNm^{-2}$) در مقادیر مختلف نسبت لاغری L/h در شاخص کسر حجمی $n=2$



شکل ۱۴- طیف فرکانسی تیر دوسر گیردار FGPM تحت نیروی مکانیکی ($10kNm^{-2}$) در مقادیر مختلف ضخامت تیر به ازای $n=10$

جمع بندی

- در استفاده از تیر FGPM به عنوان عملگر با افزایش شاخص کسر حجمی در واقع استحکام تیر کاهش می یابد و باعث افزایش دامنه نوسانات در تیر می شود.
- در استفاده از تیر FGPM به عنوان عملگر با افزایش شاخص توزیع کسر حجمی فرکانس طبیعی تیر کاهش می یابد.
- در استفاده از تیر FGPM به عنوان سنسور با افزایش شاخص کسر حجمی در مقادیر n بین ۰ و ۲ میزان جابجایی افزایش می یابد، اما برای مقادیر بیشتر از ۲ مقدار جابجایی کاهش می یابد.
- در استفاده از تیر FGPM به عنوان سنسور با افزایش شاخص کسر حجمی در مقادیر n بین ۰ و ۲ مقدار فرکانس طبیعی کاهش می یابد، اما برای مقادیر بیشتر از ۲ مقدار فرکانس طبیعی افزایش می یابد.
- کاهش ضخامت تیر باعث کاهش فرکانس طبیعی تیر FGPM می شود.
- با اعمال نیروی مکانیکی و نیروی الکتریکی بر تیر FGPM نسبت به حالت تیر FGPM که تنها تحت نیروی مکانیکی است، دارای تغییر مکان بیشتری می باشد و با معکوس کردن بار الکتریکی اعمالی میزان تغییر مکان کمتر می شود.
- با افزایش مقدار پارامتری نسبت لاغری میزان دامنه نوسانات افزایش می یابد.
- هر چه محدود سازی تیر FGPM کمتر باشد، میزان فرکانس های طبیعی کمتر و دامنه نوسانات بالاتر می باشد.
- جابجایی تیر FGPM با شرایط مرزی $C-f$ دارای بیشترین دامنه نوسانات نسبت به حالت $S-S$ و $C-C$ است.

منابع و مراجع

- [1] Li Y, Feng W, Cai Z. (2014). "Bending and free vibration of functionally graded piezoelectric beam based on modified strain gradient theory". *Composite Structures*, 115, pp 41-50.
- [2] 2. Komijan M, Kiani Y, Eslami M R. (2012). "Non-linear thermoelectrical stability analysis of functionally graded piezoelectric material beams". *Journal of Intelligent Material Systems and Structures*, 24(4), PP 399–410.
- [3] Dineva P. (2014). "Dynamic Fracture of Piezoelectric Materials". *Solid Mechanics and Its Applications* 212, PP 7-32.
- [4] Jordan T, Ounaies LZ, ICASE. (2001). "Piezoelectric Ceramics Characterization". *Icase Report No-28*.
- [5] Lippmann G. (1881). "Principe de la conservation de l'électricité, ou second principe de la théorie des phénomènes électriques". *Ann. Chim. Phys*, 24, 145, PP 381-394.
- [6] Voigt W. (1910). "Lehrbuch der Kristallphysik". *Teubner, Leipzig. Springer Fachmedien Wiesbaden GmbH*.
- [7] Valasek J. (1920). "Piezoelectric and allied phenomena in Rochelle salt". *Phys Rev* 15:537.
- [8] 8. Lüker A, Técnico IS. (2013) "A Short History of Ferroelectricity" *Departamento de Física*.
- [9] Prof. Qing-Hua Qin. (2013). "Advanced Mechanics of Piezoelectricity". *Springer*. ISBN 978-3-642-29766-3.
- [10] Cemilewski M, Pietrzak K. (2017) "Metal-ceramic functionally graded materials manufacturing, characterization application". *Technical Sciences*, Vol. 64, No. 1. PP 151-160.
- [11] Bever MB, Duwez PE. (1972). "Gradients in Composite Materials". *Mater. Sci. Eng.*, 10.
- [12] Bohidar Sh K, Sharma R, Mishra PR. (2014). "Functionally Graded Materials: A Critical Review". *International Journal of Research (IJR)* Vol-1, Issue-7.
- [13] Koizumi M. (1997). "FGM activities in Japan". *Composites Part B* 28B. PP 1-4.
- [14] Kieback B, Neubrand A, Riedel H. (2003). "Processing techniques for functionally graded materials". *Materials Science and Engineering A* 362. PP 81–105.
- [15] Zhu X, Wang Q, Meng Z. (1995). "A functionally gradient piezoelectric actuator prepared by powder metallurgical process in PNN-PZ-PT system". *Journal of Materials Science Letters* 14, PP 516-518.
- [16] Zhu X, Meng Z. (1995). "Operational principle, fabrication and displacement characteristics of a functionally gradient piezoelectric ceramic actuator". *Sensors and Actuators A*, 48, PP 169-176.
- [17] Yang J, Xiang H J. (2007). "Thermo-electro-mechanical characteristics of functionally graded piezoelectric actuators". *Smart Mater, Struct*, 16. PP 784–797.
- [18] Fernandes A, Pouget J. (2004). "Analytical and Numerical Modelling of Laminated Composites with Piezoelectric Elements". *Journal of Intelligent Material Systems and Structures*, Vol, 15. PP 753-761.
- [19] Saravanan DA, Heyliger PR. (1999). "Mechanics and computational models for laminated piezoelectric beams, plates, and shells". *Applied Mechanics Reviews*, 52, PP 305–320.
- [20] FRECKER. MI. (2003). "Recent Advances in Optimization of Smart Structures and Actuators". *Journal of Intelligent Material Systems and Structures*, Vol, 14. PP 207-216.
- [22] Kruusing A. (2000). "Analytical and optimization of loaded cantilever beam microactuators". *Smart Materials and Structures*, 9, pp 186–96.
- [24] Shi ZF. (2002). "General solution of a density functionally gradient piezoelectric cantilever and its applications". *Smart Materials and Structures*, 11, pp 122–129.
- [25] Liu TT, Shi ZF. (2004). "Bending behavior of functionally gradient piezoelectric cantilever". *Ferroelectrics*, 30, pp 843–851.
- [26] Shi ZF. (2005). "Bending behavior of piezoelectric curved actuator". *Smart Materials and Structures*, 14, pp 835–842.

- [27] Hauke T, et al. (2000). "Bending behavior of functionally gradient materials". *Ferroelectrics*, 238, pp 195–202.
- [28] Joshi S, Mukherjee A, Schmauder S. (2003a). "Exact solutions for characterization of electro-elastically materials". *Computational Materials Science*, 28, pp 548–555.
- [29] Joshi S, Mukherjee A, Schmauder S. (2003). "Numerical characterization
- [30] of functionally graded active materials under electrical and thermal fields". *Smart Materials and Structures*, 12, pp 571–579.
- [31] Lee HJ. (2005). "Layerwise laminate analysis of functionally graded piezoelectric bimorph beams". *Journal of Intelligent Material Systems and Structures*, 16, pp 365–371.
- [32] Taya M. (2003). "Fabrication and evaluation of porous piezoelectric ceramics and porosity-graded piezoelectric actuators". *Journal of the American Ceramic Society*, 86, pp 1094–1098.
- [33] Li T, Chen YH, Ma J. (2005). "Characterization of FGM monomorph actuator fabricated using EPDJ". *Journal of Materials Science*, 40, pp 3601–3605.
- [34] Yang J, and Xiang HJ. (2007). "Thermo-Electro-Mechanical Characteristics of Functionally Graded Piezoelectric Actuators". *Smart Materials and Structures*, 16:784_797.